

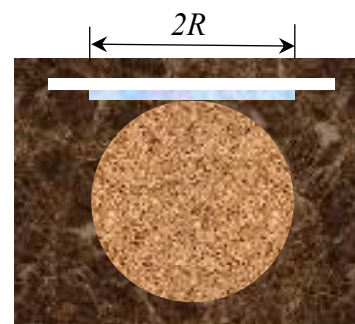
Время выполнения заданий — 240 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.

Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

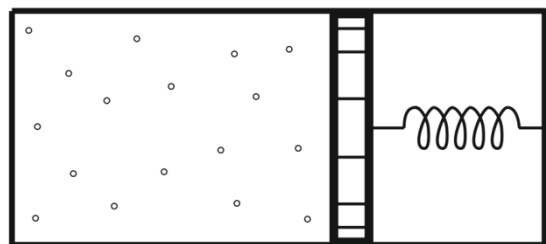
Максимальное количество баллов — 100.

Задача 1. Обнаружив неглубокое подземное круглое озеро радиуса $R = 200$ м ученые провели высокоточные оптические измерения и установили, что кривизна поверхности воды в нем отличается от кривизны радиуса Земли. Причем так, что поверхность воды в центре озера расположена на $\Delta h = 1$ мм ниже воображаемой сферы проходящей через края озера и имеющей радиус кривизны Земли. Эхолокация показала, что под озером находится сферическая неоднородность породы того же радиуса, что и само озеро. Центр неоднородности лежит точно под центром озера, и своим верхом она касается озера (см. рис). Найдите плотность материала неоднородности, считая, что плотность окружающих пород равна средней плотности Земли $\rho = 5515$ кг/м³. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

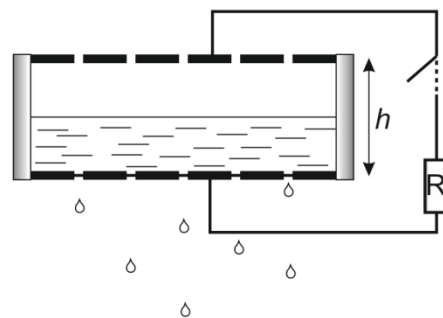


Задача 2. Пружина с линейным законом растяжения от приложенной силы имеет в состоянии равновесия длину $3R/2$, а если к ней подвесить грузик, то длина пружины составит $5R/2$. Грузик положили на дно сферической гладкой неподвижной поверхности радиуса R , а начало пружины закрепили на высоте $2R$ над нижней точкой поверхности. Затем, не отрывая его от поверхности, грузик сместили на небольшое по сравнению с R расстояние и отпустили. Найдите период малых колебаний груза.

Задача 3. Внутри горизонтального цилиндра находится смесь азота и гелия, запертая поршнем с давящей на него пружиной (см. Рис). В отсеке, где находится пружина, создан вакуум. Пружина не деформирована, когда поршень прижат к противоположному торцу цилиндра. Если в течение минуты пропускать ток $I = 4$ А через сопротивление $r = 1$ Ом расположенное внутри цилиндра, то температура смеси поднимается на $\Delta T = 10$ °С после установления равновесия; за такое короткое время газ под поршнем не успевает обменяться теплом с окружающей средой. Из-за того, что материал стенок оказался проницаем для атомов гелия, через очень большой интервал времени он полностью улетучился из цилиндра, при этом объем газа сократился на 25% от его первоначального значения, имея температуру, вернувшуюся к исходному равновесному с окружающей средой значению. Найти количество азота в смеси. Пренебрегайте теплоемкостями стенок, поршня и сопротивления. Поршень перемещается без трения.



Задача 4. В сосуде цилиндрической формы, у которого дно представляет из себя металлическую пластину с небольшими дырками, бока сделаны из стекла высотой h (малой по сравнению с радиусом сосуда), а крышка – такую же металлическую пластину с дырками, налит раствор поваренной соли, являющийся хорошо проводящим электролитом. Протеканию через дырки дна электролиту препятствует напряжение, которое создаётся противоположными зарядами на двух пластинах. Электролит заполняет половину сосуда. В некоторый момент замыкают цепь (см. рисунок), в которой присутствует очень большое сопротивление R . После этого электролит начинает медленно протекать через дырки в дне. С какой скоростью (отношение малых приращений изменения объёма электролита в сосуде к приращению времени, $\Delta V/\Delta t$) будет происходить это протекание сразу после включения? Считать, что в электролите в каждый момент времени успевает установиться механическое равновесие; сопротивлением электролита пренебречь.



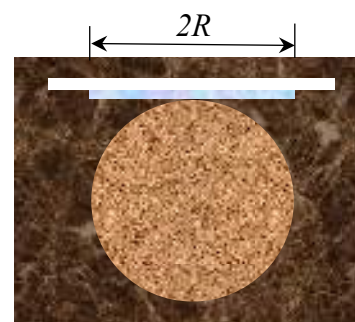
Задача 5. Считая, что температура атмосферы не зависит от высоты, оцените температуру кипения воды на высоте 5 км. Известно, что падение давления насыщенных паров воды на 20% достигается понижением температуры паров на 5.5°C .

10 класс. Решения.

Предложение оценки: задачи 1-3 оцениваются в 20 баллов, задача 4 в 25 баллов, задача 5 в 15 баллов, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Аникин Юрий Александрович). Обнаружив неглубокое подземное круглое озеро радиуса $R = 200$ м ученые провели высокоточные оптические измерения и установили, что кривизна поверхности воды в нем отличается от кривизны радиуса Земли. Причем так, что поверхность воды в центре озера расположена на $\Delta h = 1$ мм ниже воображаемой сферы проходящей через края озера и имеющей радиус кривизны Земли. Эхолокация показала, что под озером находится сферическая неоднородность породы того же радиуса, что и само озеро. Центр неоднородности лежит точно под центром озера, и своим верхом она касается озера (см. рис). Найдите плотность материала неоднородности, считая, что плотность окружающих пород равна средней плотности Земли $\rho = 5515$ кг/м³. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.



Решение. Неоднородность дает локальную добавку к вектору ускорения \mathbf{g} по величине равную

$$a = \frac{GM_{\text{eff}}}{r^2}$$

где r – расстояние от центра линзы, а M_{eff} определяется разностью плотностей материала неоднородности и окружающих пород:

$$M_{\text{eff}} = \frac{4\pi}{3} \Delta\rho R^3$$

Суммарный гравитационный потенциал на поверхности озера

$$-\frac{GM_{\text{eff}}}{r} + gy = \text{const} \Rightarrow -\frac{GM_{\text{eff}}}{R} + \frac{GM_{\text{eff}}}{\sqrt{2}R} = g\Delta h$$

Представив ускорение свободного падения Земли в виде

$$g = \frac{4\pi}{3} \rho G R_3$$

окончательно запишем

$$\rho_{\text{н}} = \rho + \Delta\rho = \rho - \rho \frac{R_3 \Delta h}{R^2} \frac{1}{1-1/\sqrt{2}} = 2500 \text{ кг/м}^3$$

Примечание. Пещера не влияет на уровень озера, т.к. из рисунка ясно, что она будет давать гравитационный потенциал бесконечной пластины, т.е. зависящий только от координаты y . Подземность озера нужна в задаче для того, чтобы ученые могли проводить прецизионные измерения с его поверхностью – пещера защищает зеркало воды от атмосферных явлений.

Разбалловка.

Сделано утверждение, что поверхность жидкости является эквипотенциальной	4 балла
Применён принцип суперпозиции для гравитационного потенциала (или гравитационного поля)	4 балла
Найдена масса (отрицательная) полости	4 балла
Написано уравнение на эквипотенциальность	4 балла
Получен окончательный ответ	4 балла

Задача 2. Механика.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич). Пружина с линейным законом растяжения от приложенной силы имеет в состоянии равновесия длину $3R/2$, а если к ней подвесить грузик, то длина пружины составит $5R/2$. Грузик положили на дно сферической гладкой неподвижной поверхности радиуса R , а начало пружины закрепили на высоте $2R$ над нижней точкой поверхности. Затем, не отрывая его от поверхности, грузик сместили на небольшое по сравнению с R расстояние и отпустили. Найдите период малых колебаний груза.

Решение. При смещении на расстояние x в горизонтальном направлении грузик будет подниматься на высоту

$$z = \frac{x^2}{2R}$$

Длина пружины при этом изменится от значения $2R$ на величину

$$u = \sqrt{(2R - z)^2 + x^2} - 2R \approx -\frac{x^2}{4R}$$

Сила растяжения пружины в нижнем положении грузика равна $mg/2$, где m – масса грузика. Поэтому при смещении грузика пружина совершает работу

$$A_{\text{пр}} = \frac{mg}{2} \frac{x^2}{4R} = \frac{mgx^2}{8R},$$

то есть полная потенциальная энергия грузика

$$П = mgz - A_{\text{пр}} = \frac{3mgx^2}{8R}$$

Таким образом, частота колебаний грузика

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{4R}}$$

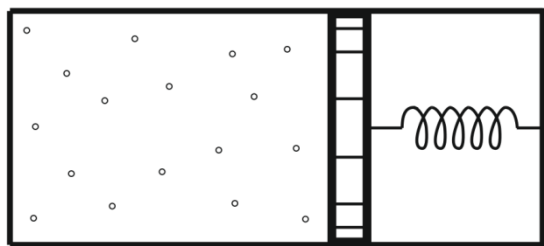
Разбалловка.

Нарисован правильный рисунок, как расположены элементы схемы	4
Посчитана зависимость удлинения пружины от горизонтального смещения	4
Посчитана зависимость потенциальной энергии пружины в зависимости от горизонтального смещения	4
Посчитана зависимость гравитационной потенциальной энергии в зависимости от горизонтального смещения	4
Посчитан период колебаний	4
или	
Посчитана сила, действующая со стороны пружины на грузик	5
Посчитана сила, действующая со стороны гравитационного поля на грузик с учётом реакции опоры	5
Написано уравнения движения	5
Извлечён период колебаний	5

Задача 3. Термодинамика.

Условие (Аникин Юрий Александрович).

Внутри горизонтального цилиндра находится смесь азота и гелия, запёртая поршнем с давящей на него пружиной (см. Рис). В отсеке, где находится пружина, создан вакуум. Пружина не деформирована, когда поршень прижат к противоположному торцу цилиндра.



Если в течение минуты пропускать ток $I = 4 \text{ А}$ через сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$ расположенное внутри цилиндра, то температура смеси поднимается на $\Delta T = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ после установления равновесия; за такое короткое время газ под поршнем не успевает обменяться теплом с окружающей средой. Из-за того, что материал стенок оказался проницаем для атомов гелия, через очень большой интервал времени он полностью улетучился из цилиндра, при этом объём газа сократился на 25% от его первоначального значения, имея температуру, вернувшуюся к исходному равновесному с окружающей

средой значению. Найти количество азота в смеси. Пренебрегайте теплоемкостями стенок, поршня и сопротивления. Поршень перемещается без трения.

Решение. Обозначим ν_1, ν_2 – количество молей гелия и азота, соответственно. Работа, совершенная газом при расширении:

$$A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = \frac{P_2V_2}{2} - \frac{P_1V_1}{2} = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T$$

Из первого начала термодинамики

$$I^2rt = \frac{3}{2}\nu_1R\Delta T + \frac{5}{2}\nu_2R\Delta T + \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T = 2\nu_1R\Delta T + 3\nu_2R\Delta T$$

Так как в такой системе давление $P \sim V$, то при одинаковой температуре начальные и конечные объемы связаны соотношением:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \nu_1 = \frac{7}{9}\nu_2$$

Подставляя это соотношение в предыдущее выражение, получим в конечном итоге

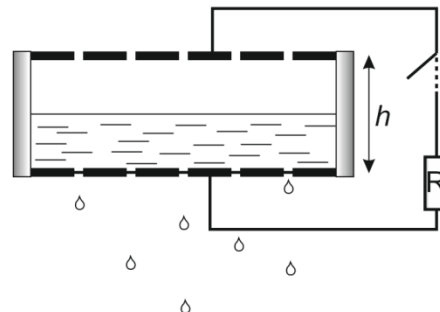
$$\nu_2 = \frac{9}{41} \frac{I^2rt}{R\Delta T} \approx 2,53 \text{ моля}$$

Разбалловка.

Установлен факт линейной зависимости давления от объёма, $P \sim V$	4
Найдена работа газа при расширении	5
Написано первое начало термодинамики	5
Получен ответ в формульном виде	3
Получен ответ в численном виде	3

Задача 4. Электростатика

Задача 4 (Вергелес Сергей Сергеевич). В сосуде цилиндрической формы, у которого дно представляет из себя металлическую пластину с небольшими дырками, бока сделаны из стекла высотой h (малой по сравнению с радиусом сосуда), а крышка – такую же металлическую пластину с дырками, налит раствор поваренной соли, являющийся хорошо проводящим электролитом. Протеканию через дырки дна электролиту препятствует напряжение, которое создаётся противоположными зарядами на двух пластинах. Электролит заполняет половину сосуда. В некоторый момент замыкают цепь (см. рисунок), в которой присутствует очень большое сопротивление R . После этого электролит начинает



медленно протекать через дырки в дне. С какой скоростью (отношение малых приращений изменения объёма электролита в сосуде к приращению времени, $\Delta V/\Delta t$) будет происходить это протекание сразу после включения? Считать, что в электролите в каждый момент времени успевает установиться механическое равновесие; сопротивлением электролита пренебречь.

Решение. Найдём массовую объёмную плотность электролита, рассмотрев систему до замыкания ключа. По сути мы имеем дело с конденсатором, образованным верхней и нижней стенками сосуда; пусть заряды на верхней и на нижней обкладках равны Q и $-Q$ соответственно. Однако электролит внутри себя изменяет поле до нуля. Электрическое поле поэтому присутствует только под крышкой сосуда над электролитом и равно

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

Электролит создаёт заряженный слой на верхней поверхности, суммарный заряд которого равен заряду крышки с противоположным знаком. Поэтому электрическое поле действует с поверхностной силой (т.е. создаёт перепад давления)

$$\Delta p = \frac{EQ}{2S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$$

Этот перепад давления компенсируется высотой столба электролита (обозначим его x , до включения $x = h/2$), поскольку над электролитом и под ним давление равно атмосферному:

$$\Delta p = \rho g x, \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S^2 g x}, \quad x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2 g \rho}. \quad (1)$$

Ёмкость конденсатора, частично заполненного электролитом, равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{h - x}$$

Когда будет замкнут ключ, в контуре потечёт ток

$$I = \frac{U}{R}, \quad U = \frac{Q}{C}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = -I = -\frac{Q(h-x)}{\varepsilon_0 S R};$$

Из уравнения (1) можно связать производную по времени от величины заряда на обкладках с производной по времени от высоты столба электролита:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S^2 g \rho} \frac{dQ}{dt}$$

В результате, скорость ухода электролита из пространства между пластинами ($\text{м}^3/\text{с}$)

$$q = -S \frac{dx}{dt} = \frac{h^2}{2\varepsilon_0 R},$$

где мы подставили значение $x = h/2$ для высоты столба электролита.

Разбалловка.

Записано выражение для скачка давления на верхней границе электролита	5
Написано гидростатическое уравнение, выражающее собой условие непротекания электролита	4
Посчитана ёмкость конденсатора с электролитом	4
Написано уравнение на ток в замкнутой цепи	4
Написано уравнение, связывающее силу тока в цепи со скоростью убывания столба электролита	5
Получен конечный ответ на скорость расхода электролита	3

Задача 5. Задача-оценка.

Условие (Парфеньев Владимир Михайлович). Считая, что температура атмосферы не зависит от высоты, оцените температуру кипения воды на высоте 5 км. Известно, что падение давления насыщенных паров воды на 20% достигается понижением температуры паров на 5.5°C.

Решение. Предположим, что атмосфера не разрежается с высотой (как оно есть на самом деле), а полностью однородна до некоторой высоты H . Эту высоту можно найти зная, что у поверхности Земли давление равно атмосферному P_0 :

$$\rho g H = P_0$$

Массовая плотность атмосферы (у земли) ρ может быть найдена из средней молярной массы воздуха (30 а.е.м.) при данной температуре $T = 20^\circ\text{C}$ или быть просто известной (равна $\rho = 1.225 \text{ кг/м}^3$). Откуда получаем, что высота атмосферы

$$H = 8\,300 \text{ км}$$

На высоте $h = 5 \text{ км}$ тогда будет давление

$$P_h = \left(1 - \frac{h}{H}\right) P_0 = 40 \text{ кПа}$$

Если кто-то из решающих установит, что на самом деле зависимость давления от высоты экспоненциальная, $P_h = P_0 \exp(-h/H) = 55 \text{ кПа}$, то он молодец.

Теперь надо установить, какова будет температура T_h кипения воды. Согласно условию

$$P_h = P_0 \cdot 0.8^{(100^\circ\text{C} - T_h)/dT}$$

где $dT = 5.5^\circ\text{C}$ а $0.8 = 1 - 20\%$. Решая это уравнение относительно T_h , получаем

$$T_h = 100^\circ\text{C} - \frac{\ln(P_0/P_h)}{\ln 0.8} dT = 77^\circ\text{C}$$

Если пользоваться экспоненциальной зависимостью давления от высоты, то получится ответ $T_h = 85$ °С.

Разбалловка.

Найдена высота атмосферного столба	4
Найдено давление на высоте	4
Написано уравнение связи между давлением и температурой кипения	4
получен окончательный ответ	3